Annexe B **:** Le calcul d'incertitude

Les types d'incertitude

Toute mesure comporte une incertitude. On peut l'exprimer sous forme **relative** ou **absolue**. L'incertitude absolue est la variation, en plus ou en moins, que peut prendre la mesure. Par exemple si je mesure une longueur L = (100 ± 5) cm, alors la valeur réelle de la longueur mesurée peut être entre 95 cm et 105 cm. La valeur 5 est donc l'incertitude absolue sur la mesure. On exprime donc une mesure de la façon suivante :

$$m \pm \Delta m$$

L'incertitude relative est le pourcentage que représente l'incertitude absolue par rapport à la valeur de la mesure. Par exemple, si je mesure une masse m = (2,12 ± 0,25) g alors l'incertitude relative est :

$$(0{,}25 / 2{,}12) \times 100\ \% = 11{,}8\ \%$$

Les chiffres significatifs

Nous allons exprimer les incertitudes à l'aide des **chiffres significatifs**. Tout chiffre d'une mesure est significatif sauf les "0" qui indiquent l'ordre de grandeur. Les "0" qui sont à droite d'un chiffre significatif sont eux-mêmes significatifs. Par exemple, la valeur 3,24 comporte 3 chiffres significatifs, la valeur 0,0078 comporte 2 chiffres significatifs et la valeur 2,308 comporte 4 chiffres significatifs. Nous adopterons la convention suivante :

- L'incertitude **absolue** sera toujours exprimée avec un seul chiffre significatif. La mesure sera ensuite arrondie pour obtenir le même nombre de décimales que l'incertitude.

- L'incertitude **relative** sera toujours exprimée avec deux chiffres significatifs. La mesure sera ensuite arrondie pour obtenir le même nombre de décimales que l'incertitude **absolue**.

Prenons d'abord comme exemple la mesure suivante m = (3,2345 ± 0,1458) kg. Après arrondissement, cette mesure sera exprimée comme m = (3,2 ± 0,1) kg. Si nous revenons maintenant à l'exemple d'incertitude relative que nous avons donné plus haut, cette mesure devrait alors s'écrire m = 2,1g à 12 %. Si l'incertitude absolue sur une mesure dépasse 10 alors on utilise la notation scientifique. Dans le cas où L = 325 ± 18 cm, on écrira L = (3,3 ± 0,2) × 10 ^{2} cm.

Opérations mathématiques sur les mesures

Une fois que nous avons pris des mesures, il faut généralement calculer des résultats à partir de ces valeurs. Le résultat de ce calcul sera lui-même entaché d'une incertitude. Soit deux mesures $x \pm \Delta x$ et $y \pm \Delta y$. Voici l'incertitude sur les opérations les plus courantes :

1. Soit $z = x + y$, l'incertitude absolue sur z est : $\Delta z = \Delta x + \Delta y$

2. Soit $z = x - y$, l'incertitude absolue sur z est : $\Delta z = \Delta x + \Delta y$

3. Soit $z = xy$, l'incertitude absolue sur z est : $\Delta z = xy\ [\ (\Delta x/x)\ +\ (\Delta y/y)\ ]$

4. Soit $z = x/y$, l'incertitude absolue sur z est : $\Delta z = x/y\ [\ (\Delta x/x)\ +\ (\Delta y/y)\ ]$

Voici quelques **exemples**. Soit $x \pm \Delta x = 2{,}1 \pm 0{,}3$ et $y \pm \Delta y = 0{,}75 \pm 0{,}05$, on a :

1. $z = x + y = 2{,}85$, l'incertitude est $\Delta z = 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}35$. En arrondissant cette valeur pour ne conserver qu'un seul chiffre significatif, on obtient :

$$z \pm \Delta z = 2{,}9 \pm 0{,}4$$

2. $z = x - y = 1{,}35$, l'incertitude est $\Delta z = 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}35$. En arrondissant on obtient :

$$z \pm \Delta z = 1{,}4 \pm 0{,}4$$

3. $z = xy = 1{,}575$, l'incertitude est :

$$\Delta z = xy\ [\ (\Delta x/x)\ +\ (\Delta y/y)\ ] = 1{,}575\ [\ (0{,}3/2{,}1)\ +\ (0{,}05/0{,}75)\ ] = 0{,}33$$

$$z \pm \Delta z = 1{,}6 \pm 0{,}3$$

4. $z = x/y = 2{,}8$, l'incertitude est :

$$\Delta z = x/y\ [\ (\Delta x/x)\ +\ (\Delta y/y)\ ] = 2{,}8\ [\ (0{,}3/2{,}1)\ +\ (0{,}05/0{,}75)\ ] = 0{,}5866$$

$$z \pm \Delta z = 2{,}8 \pm 0{,}6$$

Méthode des extrêmes

La **méthode des extrêmes** consiste à déterminer les valeurs A_{max} et A_{min} d'une quantité A, calculée à partir de grandeurs ayant des incertitudes. A_{max} correspond à la valeur maximale que peut prendre A et A_{min} correspond à sa valeur minimale.

On se sert donc de ces deux quantités (A_{max} et A_{min}) pour déterminer la valeur moyenne de la quantité A ($\overline{A}$) et son incertitude (ΔA). On cherche en fait le résultat suivant :

$$A = \overline{A} \pm \Delta A$$

où $\overline{A} = (A_{max} + A_{min}) / 2$

et $\Delta A = (A_{max} - A_{min}) / 2$

Par exemple, si vous avez à calculer la vitesse scalaire d'un mobile se déplaçant à vitesse constant sur une distance de (2,000 ± 0,001) m et dont le temps moyen pour parcourir cette distance est de (3,4 ± 0,5) s , vous pouvez calculer cette vitesse, c'est-à-dire sa valeur moyenne ainsi que son incertitude absolue.

La vitesse scalaire correspond à la distance parcourue par intervalle de temps ($v = d / t$). Nous cherchons donc $v = \overline{v} \pm \Delta v$ et avons besoin de v_{max} et v_{min} pour le calculer.

v_{max} = distance parcourue maximale / temps minimal = 2,001 / 2,9 = 0,6900 m/s

v_{min} = distance parcourue minimale / temps maximal = 1,999 / 3,9 = 0,5126 m/s

donc, $\overline{v} = (v_{max} + v_{min}) / 2$ et $\Delta v = (v_{max} - v_{min}) / 2$

$\overline{v} = (0,6900 + 0,5126) / 2$ $\Delta v = (0,6900 - 0,5126) / 2$

$\overline{v} = 0,6013$ m/s $\Delta v = 0,0887$ m/s

finalement, **v = (0,60 ± 0,09) m/s**

Méthode différentielle logarithmique

Soit z = f(x, y) une fonction quelconque à plusieurs variables. L'incertitude sur cette fonction sera calculée à l'aide de la **méthode différentielle logarithmique**. Cette méthode de calcul s'effectue en 4 étapes et est valide pour toutes les fonctions dérivables :

1. Équation : Indiquer la fonction utilisée.
2. Logarithme : Prendre le logarithme népérien (ln) de chaque côté de l'équation.
3. Dérivée : Dériver l'équation obtenue à l'étape précédente.
4. Substitution : Remplacer les variables utilisées par leurs valeurs numériques.

Exemple #1 : $x \pm \Delta x = 2{,}1 \pm 0{,}3$
$y \pm \Delta y = 0{,}75 \pm 0{,}05$

1. $z = x + y$
2. $\ln|z| = \ln|x+y|$
3. $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x + \Delta y}{x+y}\right|$
4. $\left|\frac{\Delta z}{2{,}85}\right| \leq \left|\frac{0{,}3+0{,}05}{2{,}1+0{,}75}\right|$

$|\Delta z| \leq 0{,}35$

z ± Δz = 2,9 ± 0,4

Exemple #2 : $x \pm \Delta x = 2{,}1 \pm 0{,}3$
$y \pm \Delta y = 0{,}75 \pm 0{,}05$

1. $z = x - y$
2. $\ln|z| = \ln|x-y|$
3. $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x + \Delta y}{x-y}\right|$
4. $\left|\frac{\Delta z}{1{,}35}\right| \leq \left|\frac{0{,}3+0{,}05}{2{,}1-0{,}75}\right|$

$|\Delta z| \leq 0{,}35$

z ± Δz = 1,4 ± 0,4

Exemple #3 : $x \pm \Delta x = 2{,}1 \pm 0{,}3$
$y \pm \Delta y = 0{,}75 \pm 0{,}05$

1. $z = x\,y$
2. $\ln|z| = \ln|x| + \ln|y|$
3. $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$
4. $\left|\frac{\Delta z}{1{,}575}\right| \leq \left|\frac{0{,}3}{2{,}1}\right| + \left|\frac{0{,}05}{0{,}75}\right|$

$|\Delta z| \leq 0{,}33$

z ± Δz = 1,6 ± 0,3

Exemple #4 : $x \pm \Delta x = 2{,}1 \pm 0{,}3$
$y \pm \Delta y = 0{,}75 \pm 0{,}05$

1. $z = x / y$
2. $\ln|z| = \ln|x| - \ln|y|$
3. $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$
4. $\left|\frac{\Delta z}{2{,}8}\right| \leq \left|\frac{0{,}3}{2{,}1}\right| + \left|\frac{0{,}05}{0{,}75}\right|$

$|\Delta z| \leq 0{,}5867$

z ± Δz = 2,8 ± 0,6

Exemple #5 : x ± Δx = (2,1 ± 0,3) m
θ ± Δθ = (43 ± 1)°
= (0,75 ± 0,02) rad

1. $z = x \sin \Theta$
2. $\ln|z| = \ln|x| + \ln|\sin \Theta|$
3. $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta\Theta\left(\cos\Theta\right)}{\sin\Theta}\right|$
4. $\left|\frac{\Delta z}{1{,}432}\right| \leq \left|\frac{0{,}3}{2{,}1}\right| + \left|\frac{0{,}02\left(\cos 43°\right)}{\sin 43°}\right|$

$|\Delta z| \leq 0{,}2353\, m$

z ± Δz = (1,4 ± 0,2) m

Exemple #6 : r ± Δr = (2,1 ± 0,3) m

1. $z = 4\pi r^2$
2. $\ln|z| = \ln|4| + \ln|\pi| + \ln\left|r^2\right|$
3. $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leq 0 + 0 + 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right|$
4. $\left|\frac{\Delta z}{55{,}42}\right| \leq 2\left|\frac{0{,}3}{2{,}1}\right|$

$|\Delta z| \leq 15{,}8\, m^2$

z ± Δz = (0,6 ± 0,2) × 10^2 m^2

Exercices

Pour chacun des numéros suivants, calculez l'incertitude absolue sur c en utilisant a) la méthode des extrêmes et b) la méthode différentielle logarithmique, sachant que:

a ± Δa = (2,2 ± 0,1) m/s
b ± Δb = (3,31 ± 0,02) m/s
h ± Δh = (8,96 ± 0,01) kg
m ± Δm = (44,1 ± 0,1) kg
r ± Δr = (3,95 ± 0,05) cm
θ ± Δθ = (57,4 ± 0,5)°

1. $c = a\, h$
2. $c = a / b$
3. $c = \frac{4\pi r^3}{3}$
4. $c = \frac{a + b}{m - h}$
5. $c = r \cos \Theta$
6. $c = \frac{h\, r}{a - b}$
7. $c = \frac{1}{2} m \left(a^2 - b^2\right)$