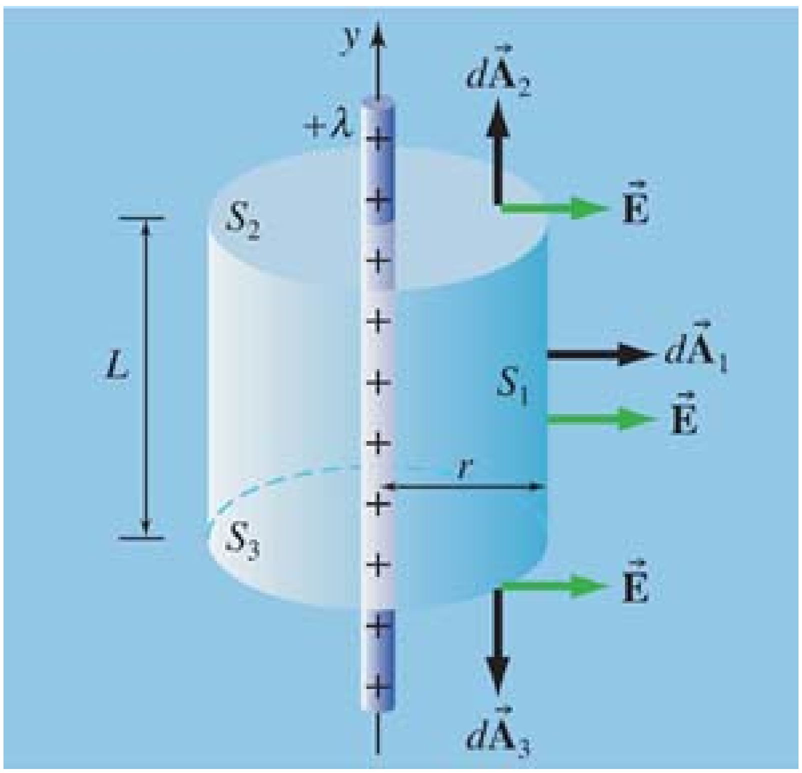
MODULE 4

LE THÉORÈME DE GAUSS



Surface de Gauss cylindrique entourant un fil infini chargé

4.1 CHAMP ÉLECTRIQUE ET CONDUCTEURS

Au module précédent, nous nous sommes limités à l'analyse des champs électriques créés par des distributions de charges ponctuelles seulement. Nous verrons donc maintenant différentes méthodes pour obtenir le champ électrique créé par des distributions de charges continues. Nous nous concentrerons particulièrement sur le théorème de Gauss (module 4.3) qui est valide pour les distributions ayant une certaine symétrie. Nous regarderons également, mais plus sommairement, une méthode d'intégration pour des cas où la symétrie n'est pas suffisante pour utiliser le théorème de Gauss.

Mais tout d'abord, voyons quelques propriétés des conducteurs à l'état d'équilibre électrostatique, c'est-à-dire pour lequel la distribution de charge ne change plus. Ces propriétés seront utiles dans l'application du théorème de Gauss.

<u>Propriétés des conducteurs à l'équilibre électrostatique</u>

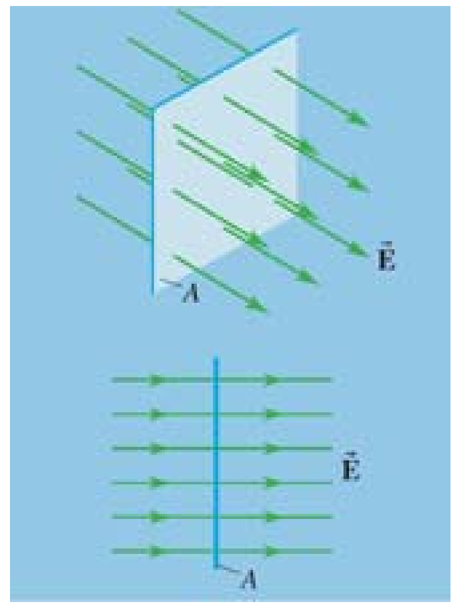
1. Le champ électrique macroscopique résultant à l'intérieur d'un conducteur homogène est nul.
2. Le champ électrique extérieur à proximité du conducteur est partout perpendiculaire à la surface du conducteur.
3. La charge excédentaire d'un conducteur homogène se répartit sur sa surface.

Je vous présente ici seulement l'énoncé de ces propriétés, puisqu'elles sont clairement expliquées au chapitre 2.3 du Benson. Je vous invite donc à le consulter pour en obtenir toute la compréhension nécessaire.

4.2 FLUX ÉLECTRIQUE

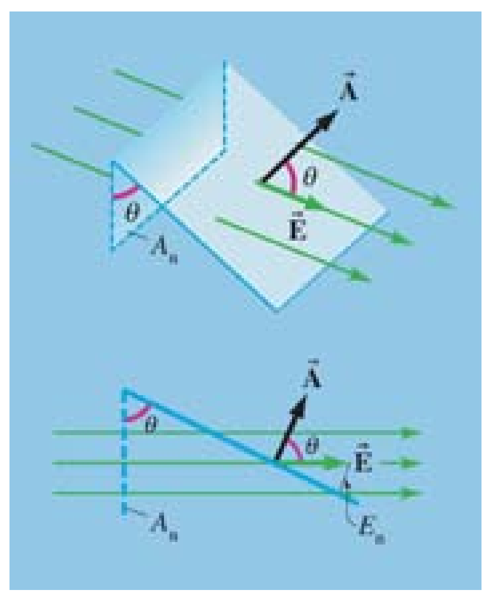
Le flux électrique traversant une surface est une notion définie comme étant le produit scalaire du champ électrique par l'aire de cette surface. L'équation suivante illustre cette relation pour le cas particulier ou le champ électrique et l'aire d'une surface plane sont constants.

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = E\,A\cos\theta$$ **Flux électrique (E et A constants) (4.1)**



où : Φ_E = flux électrique (scalaire) ($N{\cdot}m^2$ / C)
- **E** = champ électrique (vectoriel) (N/C)
- **A** = aire de la surface traversée par **E** (vectoriel) (m^2)
- θ = angle entre **A** et **E** (°)

Pour aider à la compréhension de ce concept, on dit que le flux électrique traversant une surface donnée est proportionnel au nombre de lignes de champ électrique passant par cette surface. En d'autres mots, pour une même surface, plus le champ électrique est intense, plus il y a de lignes de champ et plus le flux est élevé.



À la figure 4.1, il est possible de voir à l'image supérieure, une surface carrée traversée perpendiculairement par un champ électrique (vue oblique et vue de côté). À l'image inférieure, on voit également une surface carrée, mais cette fois-ci, elle est inclinée par rapport au champ électrique, diminuant ainsi le flux électrique, comparativement au cas précédent. Un même nombre de lignes de champ traversent la surface inclinée **A** que la surface imaginaire A_n qui est perpendiculaire aux lignes de champ, mais plus petite.

On voit également que **A** est toujours perpendiculaire à la surface et fait un angle θ avec le **E**.

Figure 4.1 Illustration du flux électrique.

Dans les cas où le champ électrique n'est pas uniforme ou si la surface n'est pas plane, nous devons procéder par intégration, c'est-à-dire sommer la contribution du flux électrique traversant chaque petite partie de la surface totale considérée.

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$ **Flux électrique (général) (4.2)**

où : Φ_E = flux électrique (scalaire) ($N{\cdot}m^2$ / C)

E = champ électrique (vectoriel) (N/C)

d**A** = élément d'aire de la surface traversée par **E** (vectoriel) (m^2)

Pour terminer, le flux électrique sortant d'une surface est positif, alors que celui entrant est négatif. Ceci est dû au fait que la direction d'un élément d'aire d**A** est toujours perpendiculaire à la surface et dirigé vers l'extérieur de la surface considérée (voir la figure 4.2). Le produit scalaire entre deux vecteurs, étant positif si l'angle qui les sépare est plus petit que 90° et négatif s'il est plus grand que 90°, génère le signe du flux approprié ($d\Phi_E = E\, dA \cos\theta$).

Notez également que le flux électrique total traversant une surface fermée est nul si le nombre de lignes de champ qui entrent est égal au nombre de lignes qui sortent de cette surface (c'est le cas de la figure 4.2).

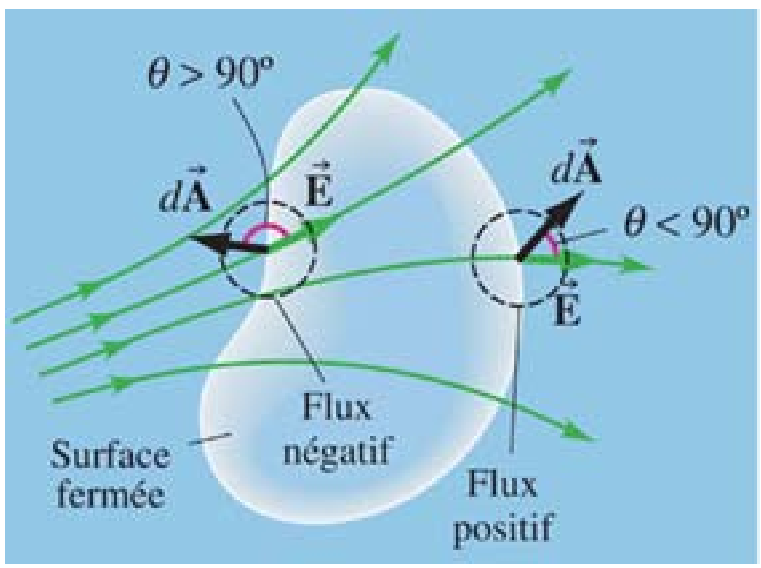
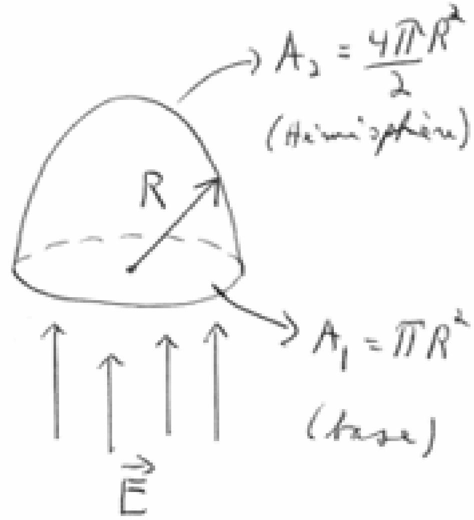


Figure 4.2 Lien entre la direction d'un élément d'aire et le signe du flux électrique.

Exemple 4.1 : Soit un champ électrique uniforme E parallèle à l'axe central d'un objet ayant la forme d'un demi-pamplemousse (un hémisphère et une base) de rayon R. Quel est le flux électrique total traversant cette surface ?

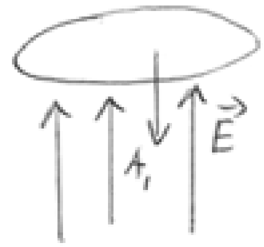


$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$= -\pi R^2 E + \pi R^2 E$$

$$\boxed{\Phi_E = 0 \ N m^2/C}$$

(1) $\Phi_1 = E A_1 \cos\theta$ (surface plane, E et A_1 constant)



$\Phi_1 = E \pi R^2 \cos 180°$ (A_1 est de sens contraire à E)

$\boxed{\Phi_1 = -\pi R^2 E}$ $N m^2/C$

(2) $\Phi_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (surface sphérique, direction de $\vec{A}_2$ variable, donc de θ aussi)

$\Phi_2 = \int_0^R E \cdot 2\pi x \, dx$ (anneau de circonférence $2\pi x$, donc $dA = 2\pi x \, dx$)

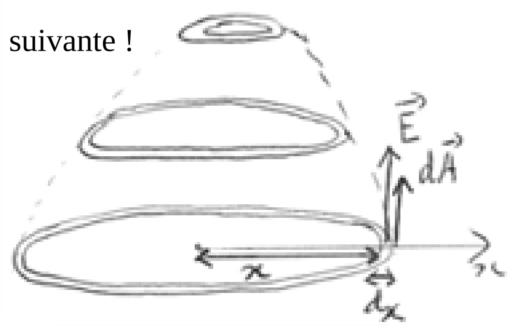
$$= 2\pi E \int_0^R x \, dx$$

$$= 2\pi E \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^R \right]$$

Voir les notes à la page suivante !

$$= 2\pi E \left[\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right]$$

$\boxed{\Phi_2 = \pi R^2 E}$ $N m^2/C$



Notes : Au problème précédent, il était possible de prévoir dès le départ que le flux total serait nul, puisqu'il y a autant de lignes de champ qui entrent dans la surface (via la base circulaire) qui en ressortent (via l'hémisphère). Après calculs, nous obtenons un flux entrant égal à $-\pi R^2 E$ et un flux sortant égal à $\pi R^2 E$.

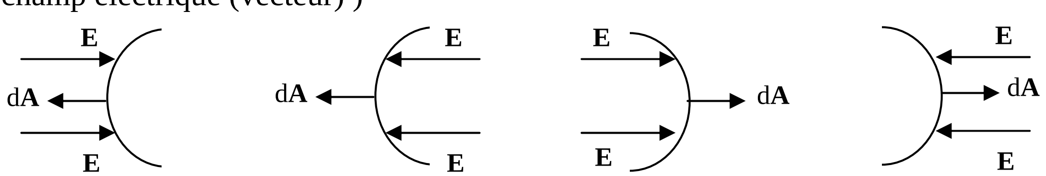
Déterminer le flux entrant (par la base) ne semble pas poser de problème à priori, puisque le champ électrique et l'aire de la surface sont constants. On peut donc appliquer l'équation 4.1. Aussi, les vecteurs **E** et **A** sont de sens contraire, il y a donc un angle de 180° entre eux (générant le signe négatif du flux).

La partie qui est la plus complexe à calculer est sans contredit celle de l'hémisphère. Le champ électrique est constant vers le haut, mais l'aire (qui est perpendiculaire à la surface) change de direction selon le point de la surface considéré. En d'autres termes, l'angle entre le vecteur A et le vecteur E n'est pas constant, ce qui ne nous permet pas de prendre l'équation 4.1. Nous devons donc nous tourner vers l'équation 4.2.

Comme en témoigne les calculs, l'équation générale du flux électrique est plus difficile à appliquer. Ici, nous avons utilisé une coupe transversale de la surface pour générer une multitude d'anneaux circulaires de rayon x (plus l'anneau est haut de la base et plus son rayon est petit). En considérant une épaisseur infinitésimalement petite dx à ces anneaux, nous obtenons l'élément d'aire ($dA = 2\pi x\ dx$) dont nous avons besoin. À travers chacun de ces anneaux passe un flux électrique qui s'additionne (par l'intégrale) pour donner le flux total de l'hémisphère.

Supplément :

L'élément d'aire (d**A**) (vecteur) est toujours dirigé vers l'extérieur de la surface. (**Note** : **E** = champ électrique (vecteur))



- $\Phi_E < 0$ (négatif)
- Φ_E <u>entrant</u> dans la surface

- $\Phi_E > 0$ (positif)
- Φ_E <u>sortant</u> de la surface

- $\Phi_E > 0$ (positif)
- Φ_E <u>sortant</u> de la surface

- $\Phi_E < 0$ (négatif)
- Φ_E <u>entrant</u> dans la surface

4.3 THÉORÈME DE GAUSS

Comme mentionné précédemment, le théorème de Gauss est utilisé pour déterminer le champ électrique de certaines distributions de charges continues dont la symétrie est suffisante pour ne pas avoir à réaliser une intégrale complexe dans le calcul du flux électrique. De plus, Gauss a déterminé que le flux électrique était aussi égal à la charge totale (Q) à l'intérieur d'une surface fermée (que l'on appellera plus tard : surface de Gauss) divisé par une constante ε_o ($\Phi_E = Q / \varepsilon_o$). Combinant les deux équations donnant le flux électrique, il obtient le théorème qui porte son nom.

<u>Énoncé du théorème</u> : Le flux total à travers une surface fermée est égal à la charge totale à l'intérieur de la surface divisée par une constante (ε_o = 8,85 x 10^{-12} $C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$).

champ électrique

Théorème de Gauss (4.3)

surface fermée (A_f)

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

somme algébrique des charges comprises à l'intérieur de la surface fermée

flux du champ

élément de surface

<u>But du théorème</u> : Déterminer l'expression du champ électrique E en un point de l'espace pour des distributions de charges symétriques.

<u>Étapes d'application du théorème</u> :

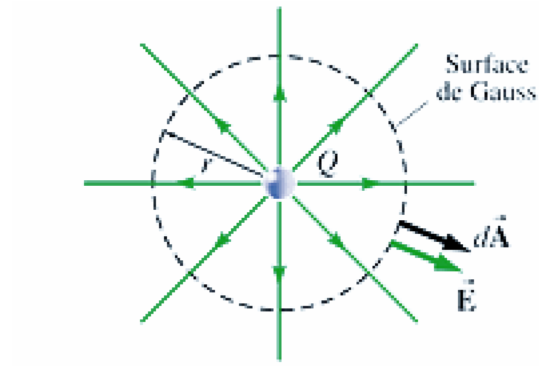
1. **Tracez** les lignes de champ électrique produites par les charges électriques.
   Tracez et identifiez le vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point où on veut le calculer.

2. Choisissez une **surface fermée** A_f qui convient à la symétrie du champ :
   E est constant pour tous les éléments de surface dA;
   θ est constant entre $\vec{E}$ et les $d\vec{A}$.
   Tracez et identifiez le vecteur surface $d\vec{A}$ au point d'application du vecteur $\vec{E}$.

3. Du **théorème de Gauss**, calculez le flux du champ électrique traversant la surface fermée (terme de gauche) et l'expression de la somme algébrique des charges situées à l'intérieur de la surface fermée (terme de droite). Il reste à mettre le champ E en évidence.

Avant de procéder à l'application du théorème pour différentes distributions de charges continues, mentionnons qu'il est applicable également dans le cas de certaines distributions de charges ponctuelles dont la symétrie est suffisante.

A) <u>Charge ponctuelle seule</u>



Après avoir tracé les lignes de champs, on choisit dans le cas de la charge ponctuelle, une surface de Gauss sphérique (surface imaginaire entourant l'élément chargé), puisque la symétrie du problème le permet. On identifie ensuite le vecteur **E** à une distance r de la charge ponctuelle (pour obtenir le champ en fonction de r) et le vecteur d**A**. Ces deux vecteurs sont perpendiculaires à la surface de Gauss, constants en grandeur pour tous les points situés à une distance r de la charge ponctuelle et l'angle θ entre **E** et d**A** est constant. On procède alors au calcul :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E A = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

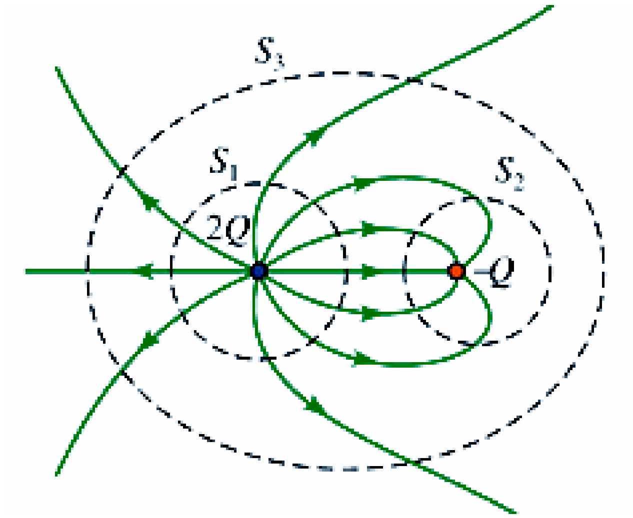
$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{r^2}}$$

Il faut se rappeler que l'aire A correspond à l'aire de la surface de Gauss, qui est ici sphérique.

Remarquez qu'on obtient exactement la même relation qu'avec la loi de Coulomb si on utilise l'équivalence $k = 1 / (4\pi\varepsilon_0)$. Il aurait été inquiétant d'obtenir une autre équation, puisqu'il s'agit de la même situation, mais utilisant une méthode différente pour la décrire.

B) Charges ponctuelles multiples

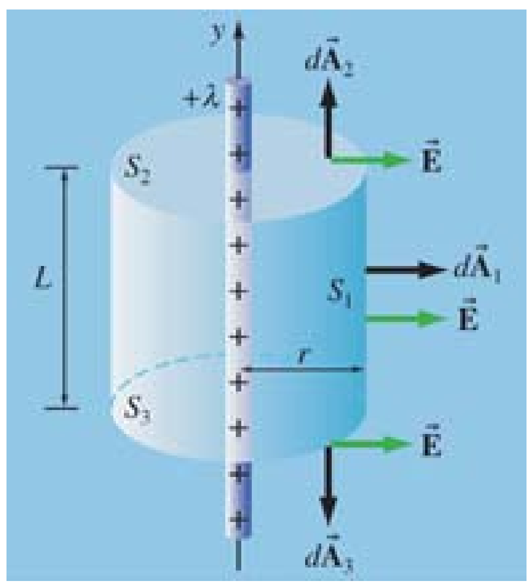
Pour une distribution de charges ponctuelles en comportant plus d'une, il n'est généralement pas possible de déterminer le champ électrique à l'aide du théorème de Gauss, étant donné le manque de symétrie du problème. Par contre, il est toujours possible de calculer le flux électrique en tenant compte des charges à l'intérieur d'une surface de Gauss déterminée.



Nous pourrions obtenir le champ électrique d'une telle distribution, mais seulement à une distance éloignée des charges, le tout pouvant alors être approximé par une seule charge ponctuelle de valeur égale à la somme des charges individuelles de départ.

C) Fil rectiligne infini chargé

Le cas que nous allons maintenant regarder est celui d'un fil rectiligne infini (très long) portant une densité linéique de charge λ (charge par unité de longueur, puisque nous ne connaissons pas la longueur total du fil). La charge qui sera contenue dans la surface de Gauss utilisée sera donc $Q = \lambda L$.



Une surface cylindrique de longueur L quelconque (le fil est cylindrique) permet d'obtenir les conditions nécessaires à l'application du théorème de Gauss. Nous avons donc un champ **E** radial au fil, perpendiculaire à la surface de Gauss S_1 et parallèle à d$\mathbf{A}_1$. Les deux autres surfaces (S_2 et S_3) formant la surface de Gauss totale (aire du cylindre au complet) présentent un champ électrique perpendiculaire aux éléments de surface (d$\mathbf{A}_2$ et d$\mathbf{A}_3$), générant ainsi un flux électrique nul à travers ces surfaces, puisque le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre est nul.

Nous pouvons donc procéder au calcul du théorème de Gauss et obtenir une expression du champ électrique en fonction de la distance r de l'axe du fil.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{S_1} \vec{E}_1\cdot d\vec{A}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{A}_2 + \int_{S_3} \vec{E}_3\cdot d\vec{A}_3 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \cdot A_1 + 0 + 0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 (2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} = \frac{2k\lambda}{r}} \quad , \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

D) <u>Autres distributions</u>

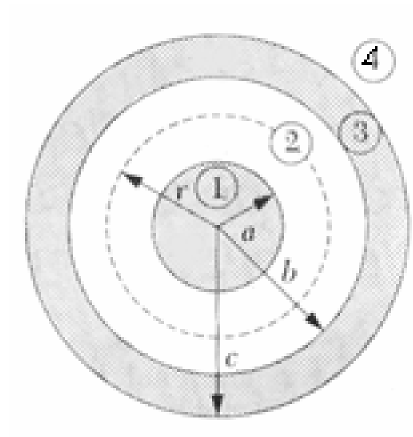
Je vous invite à consulter et à comprendre les autres cas présentés à la section 3.4 du Benson, soit :

- Exemple 3.3 : Sphère creuse de rayon R et de charge Q uniformément répartie sur sa surface
- Exemple 3.4 : Sphère pleine non conductrice uniformément chargée
- Exemple 3.6 : Feuille plane infinie chargée (très mince)
- Exemple 3.7 : Plaque conductrice infinie (avec une certaine épaisseur)

E) Cavité à l’intérieur d’un conducteur

Dans cette partie, puisque nous travaillerons avec des conducteurs, nous utiliserons les propriétés des conducteurs à l’équilibre électrostatique (vues au module 4.1) pour nous permettre de bien représenter la distribution des charges et ensuite appliquer le théorème de Gauss.

Exemple 4.2 : Une sphère pleine conductrice de rayon a porte une charge positive nette 2q. On la place au centre d’une sphère conductrice creuse de rayon intérieur b et de rayon extérieur c ayant une charge nette – q. Utilisez le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique dans les régions 1, 2, 3 et 4.



(1) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$E_1 A_1 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_1 = 0 \text{ N/C}}$$

La sphère pleine (à l’intérieur) étant chargée et conductrice, nous savons de par les propriétés des conducteurs à l’équilibre électrostatique, que ses charges sont distribuées uniformément sur sa surface. La surface de Gauss S_1 englobe donc une charge nette nulle.

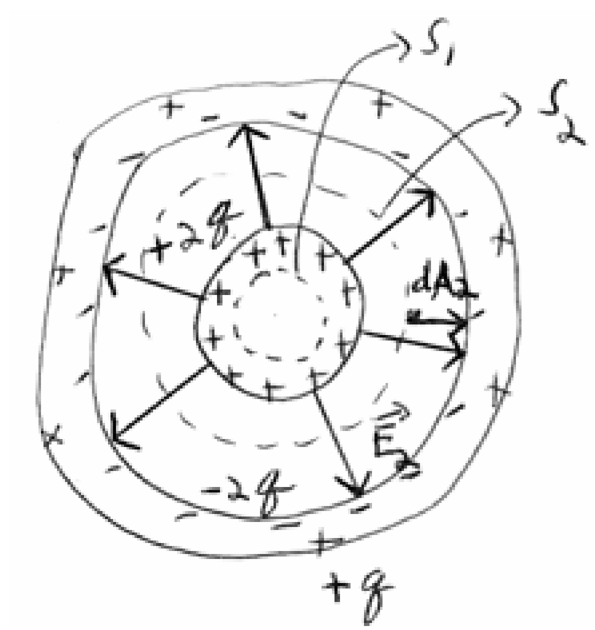
(2) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$E_2 A_2 = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 (4\pi r^2) = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{2q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{E_2 = \frac{2kq}{r^2}}$$



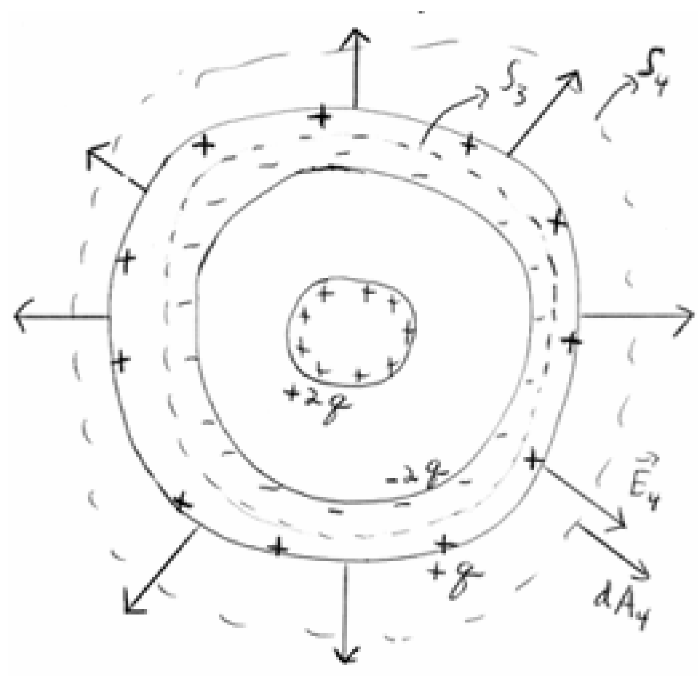
Pour ce qui est de la région 3, elle est située à l'intérieur de la sphère creuse qui est elle aussi conductrice. Nous sommes donc en mesure de dire que le champ électrique à l'intérieur est nul. Si nous regardons la distribution des charges, nous avons une charge positive (+2q) sur la sphère pleine intérieure, ce qui va attirer une charge équivalente de signe contraire (-2q) sur la parois intérieure de la sphère creuse, générant évidemment une charge nette nulle à l'intérieur de la surface de Gauss S_3.

Étant donné qu'une charge -2q est déjà présente sur la parois intérieure de la sphère creuse, il doit y avoir une charge +q sur la parois extérieure pour arriver à la charge totale (charge nette) de –q qu'elle possède. En d'autres mots, l'excédant de charge (–q) que possède la sphère creuse est attirée sur sa parois intérieure (le plus près possible de la charge +2q), en plus d'une charge –q qui provient des électrons libres du conducteur. Le déplacement de ces électrons crée un manque +q sur la parois extérieure de la sphère creuse

③ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$E_3 A_3 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_3 = 0 \text{ N/C}}$$



④ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$E_4 A_4 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_4 (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_4 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{E_4 = \frac{kq}{r^2}}$$

4.4 DISTRIBUTIONS DE CHARGES CONTINUES

Nous venons de voir le théorème de Gauss qui sert à déterminer le champ électrique produit par une distribution de charges continues et symétrique. Ce théorème permet de simplifier les calculs (quoique assez complexes malgré tout dans certains cas), mais est applicable seulement pour des situations particulières telles que vues à la section précédente.

Nous allons maintenant voir comment évaluer le champ électrique d'une distribution quelconque de charges continues (symétrique ou non). En divisant la charge de l'objet en petits éléments infinitésimaux dq (qui peuvent être considérés comme des charges ponctuelles), nous pourrons appliquer l'équation du champ électrique d'une charge ponctuelle (vue au module 3.1 : $\mathbf{E} = k|Q| / \mathbf{r}^2$) pour chacun de ces éléments de charge. Nous aurons donc comme élément de champ $d\mathbf{E} = k\,|dq| / \mathbf{r}^2$ et en intégrant par la suite, nous obtenons le champ électrique total $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$.

La théorie est relativement simple, mais son application peut être considérée très ardue mathématiquement, comme en témoigne la démonstration effectuée dans le Benson à la page 46 (section 2.5) afin d'obtenir le champ électrique à une distance radiale r d'un fil rectiligne infini chargé uniformément. Nous avons déjà obtenue cette équation avec le théorème de Gauss, et ce, beaucoup plus facilement, d'où l'intérêt d'utiliser le théorème lorsque cela est possible.

L'exemple 2.9 du Benson illustre lui aussi le cas d'un fil rectiligne uniformément chargé, mais celui-ci n'est pas infini (il a une longueur définie). Dans cet exemple, le champ électrique recherché n'est pas radial au fil, mais sur l'axe du fil (ce que le théorème de Gauss ne permet pas de déterminer). De plus, il constitue un des exemples les plus simple impliquant cette méthode d'intégration. Je vous invite donc à le consulter attentivement, car nous nous limiterons à des cas similaires seulement. Les autres cas pourront être étudiés ultérieurement, si vous poursuivez des études dans le domaine!!!