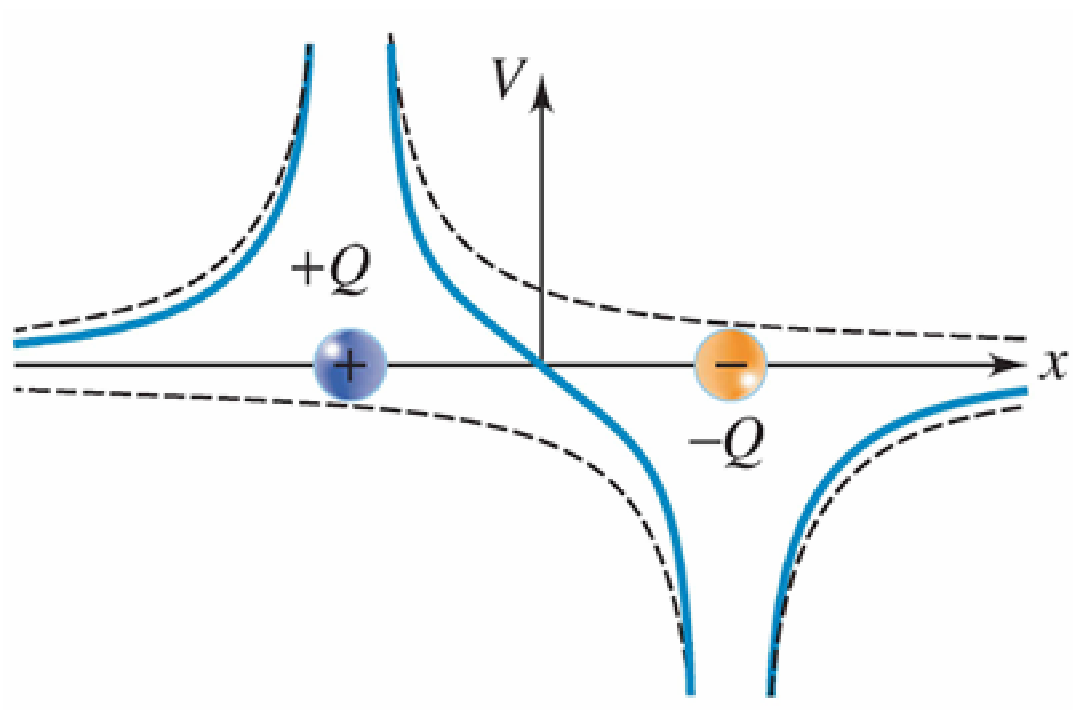
MODULE 5

LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE



Représentation du potentiel total pour deux charges de signes opposés

5.1 POTENTIEL ÉLECTRIQUE

Dans ce module, nous allons étudier la notion de potentiel électrique, en faisant le parallèle avec des notions vues en mécanique, afin de se doter d'une autre méthode (après celles vues dans les modules 3 et 4) permettant d'obtenir le champ électrique d'une distribution de charge quelconque.

A) Potentiel électrique

Nous avons vu dans le cours de mécanique que la force agissant entre deux objets ayant une certaine masse était donnée par la loi de la gravitation universelle de Newton. Cette force étant conservative, nous avons pu définir une énergie potentielle gravitationnelle. En électricité, la loi de Coulomb donnant la force électrique entre deux charges ponctuelles à la même forme, elle est conservative et une énergie potentielle électrique peut être définie. À la figure 5.1 et dans le tableau suivant, nous voyons très clairement les similitudes : m devient q et **g** devient **E**.

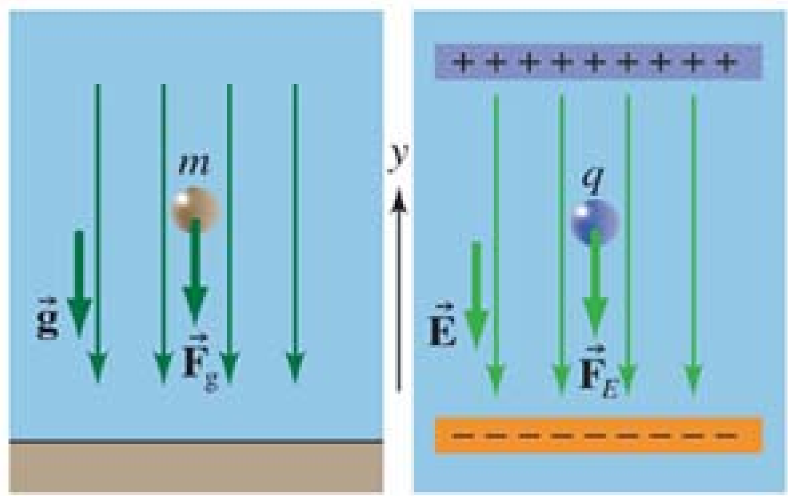


Figure 5.1 Représentation des similitudes entre le champ gravitationnel et le champ électrique.

Mécanique		Électricité	
Force gravitationnelle	$\mathbf{F}_g = GMm / \mathbf{r}^2 = m\mathbf{g}$	$\mathbf{F}_E = kQq / \mathbf{r}^2 = q\mathbf{E}$	Force électrique
Champ gravitationnel	$\mathbf{g} = GM / \mathbf{r}^2$	$\mathbf{E} = kQ / \mathbf{r}^2$	Champ électrique
Énergie potentielle gravitationnelle	$U_g = mgy$	$U_E = qEy$	Énergie potentielle électrique
Potentiel gravitationnel	$V_g = U_g / m = gy$	$V_E = U_E / q = Ey$	Potentiel électrique

Le potentiel électrique est en fait de l'énergie potentielle électrique par unité de charge au même titre que le potentiel gravitationnel est de l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse.

$$V_E = U_E / q$$ **Potentiel électrique (5.1)**

où : V_E = potentiel électrique (scalaire) (J / C ou V (volt))
U_E = énergie potentielle électrique (scalaire) (J) (joule)
q = charge électrique (scalaire) (C) (coulomb)

L'avantage de définir un potentiel électrique est qu'il ne dépend que du champ électrique créé par les charges sources et non de la charge d'essai q. De plus, il est souvent plus facile d'analyser une situation physique à partir du potentiel électrique (scalaire) qu'à partir du champ électrique (vecteur).

B) <u>Équipotentielles</u>

Les équipotentielles sont des lignes qui joignent les points de même potentiel. Les lignes de champ électrique sont perpendiculaires aux équipotentielles et sont orientées des potentiels élevés vers les potentiels plus faibles. À partir des équipotentielles, il est donc possible d'obtenir le champ électrique.

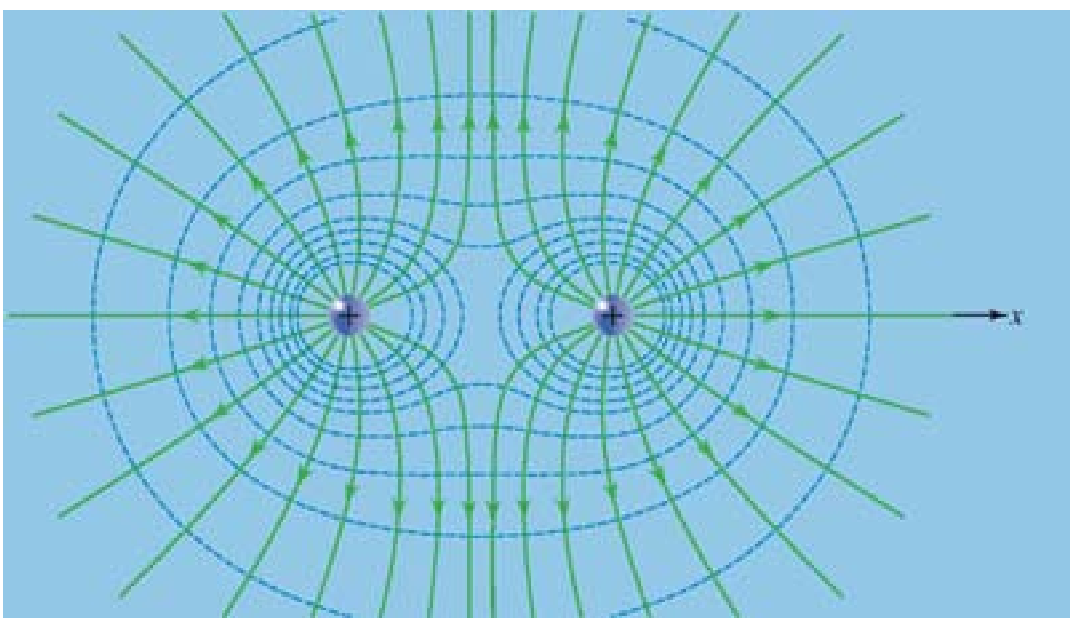


Figure 5.2 Équipotentielles et lignes de champ pour deux charges positives.

C) <u>Potentiel électrique d'une charge ponctuelle</u>

On sait que l'énergie potentielle électrique (voir le tableau au module 5.1 A)) est $U_E = qEy = qEr$ (en coordonnées sphériques). De plus, le champ électrique pour une charge ponctuelle (équation 3.2) est égale à kQ / r^2 . Combinant ces deux équations, nous obtenons $U_E = kqQ / r = q V_E$. Donc,

$$V_E = k\,Q / r$$ **Potentiel électrique (charge ponctuelle) (5.2)**

où : V_E = potentiel électrique (scalaire) (V) (volt)
k = constante de la loi de Coulomb = $9{,}00 \times 10^9$ N·m^2 / C^2
Q = charge électrique (C) (coulomb)
r = distance radiale (m) (mètre)

À la figure 5.3, la distance radiale est mesurée selon l'axe des x (r devient donc x). On peut y voir la représentation des lignes de champ électrique (radiales à la charge ponctuelle) ainsi que les équipotentielles (concentriques à la charge et perpendiculaire au champ électrique).

On remarque également le lien entre la position d'un point de l'espace (sur l'axe des x ici) et le potentiel électrique. Plus on s'éloigne de la charge, plus le potentiel est faible (V_E est inversement proportionnelle à la position : fonction 1/x).

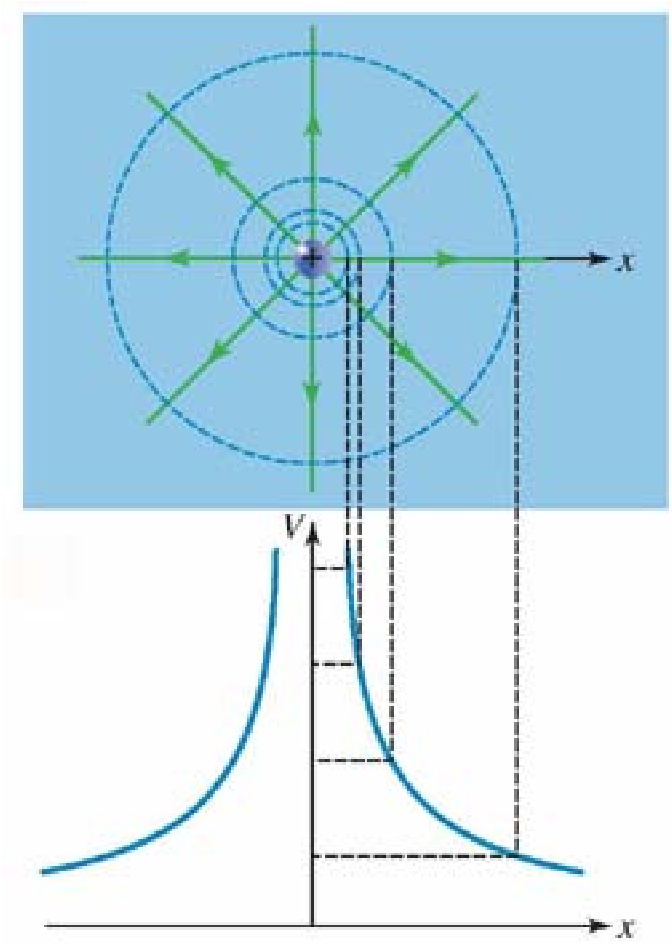


Figure 5.3 Potentiel électrique d'une charge ponctuelle : schéma (équipotentielles et champ électrique) et fonction potentiel $V_E = kQ/x$.

D) Potentiel électrique d'un système de charges ponctuelles

$V_E = \sum k\, Q_i / r_i$ **Potentiel électrique (plusieurs charges ponctuelles) (5.3)**

où : V_E = potentiel électrique (scalaire) (V) (volt)

k = constante de la loi de Coulomb = $9{,}00 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2 / C^2}$

Q_i = charge électrique de la particule i (C) (coulomb)

r_i = distance entre la particule i et le point de l'espace pour lequel on cherche le potentiel (m)

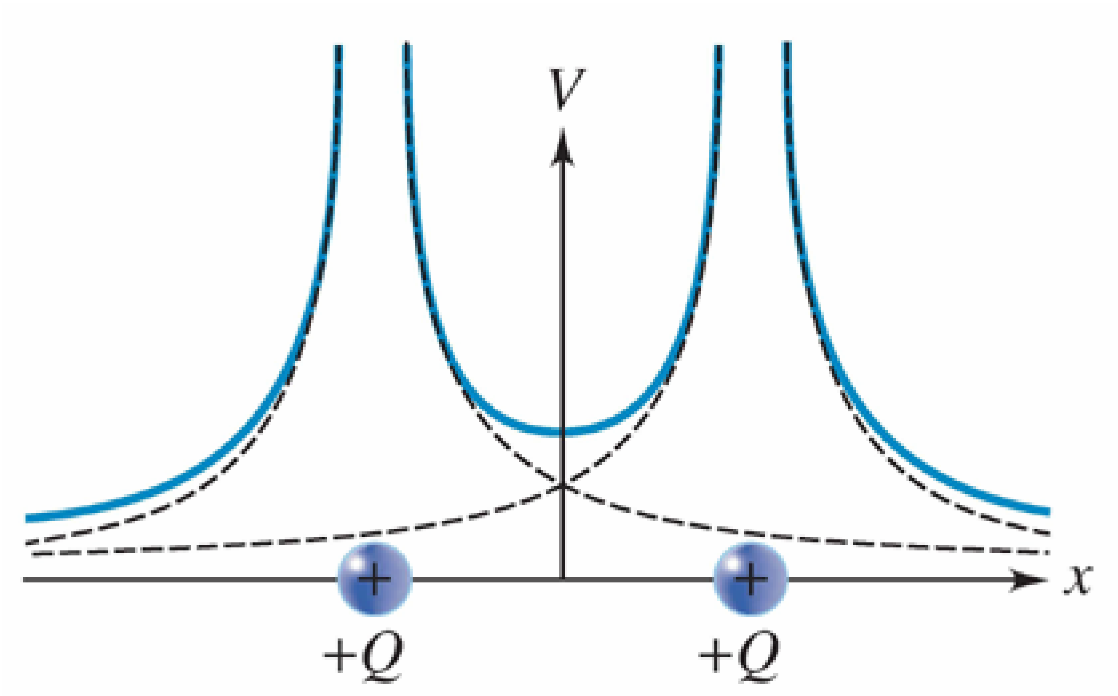
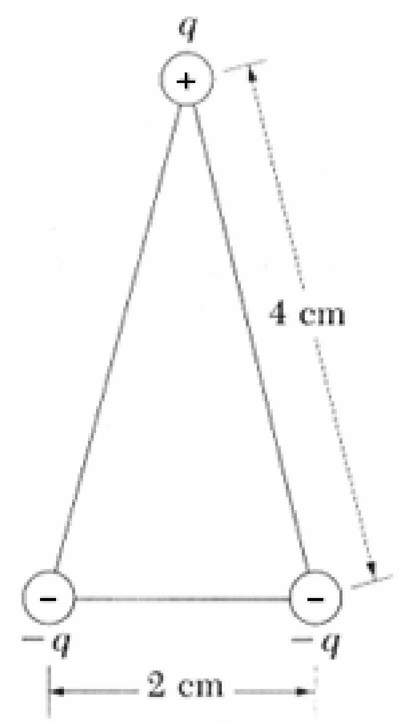


Figure 5.4 Potentiel électrique d'un système composé de deux charges ponctuelles positives en fonction de la position x.

Notez qu'à la figure 5.4, les lignes pointillées représentent le potentiel électrique de chacune des charges prises individuellement, alors que la ligne en trait plein est le potentiel électrique total (addition des deux courbes individuelles).

Exemple 5.1 : Trois charges ponctuelles occupent les sommets d'un triangle isocèle (q = 5 μC) tel qu'illustré. Déterminez le potentiel électrique au milieu de sa base.

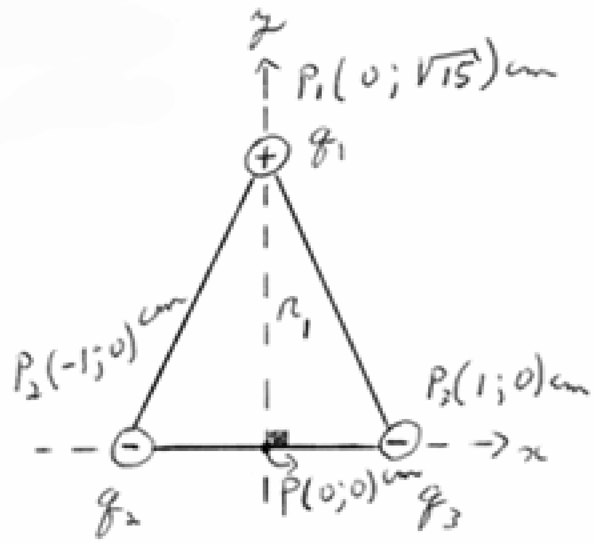


①

$r_1 = \sqrt{4^2 - 1^2}$

$r_1 = \sqrt{15}$ cm

$r_1 = 0,0387$ m



②

$$V_E = \sum_i \frac{k Q_i}{r_i}$$

$$V_E = k\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right]$$

$$V_E = (9,0\times10^{9})\left[\frac{+(5\times10^{-6})}{0,0387} + \frac{(-5\times10^{-6})}{0,01} + \frac{(-5\times10^{-6})}{0,01}\right]$$

$$\boxed{V_E = -7,84\times10^{6}\ V}$$

E) <u>Potentiel électrique d'une distribution continue de charge</u>

Le potentiel électrique d'une distribution continue de charge peut se calculer en prenant compte de la contribution de chacun des éléments de charge infinitésimale dq (l'intégrale constituant la somme d'un nombre infini de particules élémentaires).

$$V_E = k \int dq / r$$ **Potentiel électrique (distribution continue de charge) (5.4)**

où : V_E = potentiel électrique (scalaire) (V) (volt)

k = constante de la loi de Coulomb = 9,00 x 10^9 N·m^2 / C^2

dq = élément de charge électrique (C) (coulomb)

r = distance entre dq et le point de l'espace pour lequel on cherche le potentiel (m) (mètre)

Notez cependant que cette équation ne convient généralement pas lorsque la distribution de charge est infinie. En posant V=0 à l'infini, on obtient des valeurs indéterminées de potentiel près de la distribution de charge. Nous utiliserons donc l'équation 5.5 pour calculer la différence de potentiel électrique autour de n'importe quel type d'objet chargé (infini ou non, ponctuelle ou non). Il faut par contre connaître le champ électrique produit par l'objet (à l'aide du théorème de Gauss ou d'une autre méthode) pour pouvoir utiliser cette équation. Nous verrons au module 5.2 d'où elle provient.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$ **Différence de potentiel électrique (5.5)**

où : V_B = potentiel électrique au point B (scalaire) (V) (volt)

V_A = potentiel électrique au point A (scalaire) (V) (volt)

E = champ électrique (vecteur) (N/C)

d**s** = élément de déplacement (vecteur) (m) (mètre)

L'équation 5.5 nous donne donc la différence de potentiel entre deux points de l'espace environnant un objet chargé quelconque dont le champ électrique est connu.

Exemple 5.2 : Déterminez la différence de potentiel entre les points P_A (1 ; 2 ; 3) et P_B (2 ; 4 ; 6) d'un espace où règne le champ électrique suivant : $\mathbf{E} = (4x^2yz\,\mathbf{i} + 2xy^2z\,\mathbf{j} - y^3\,\mathbf{k})$ N/C.

$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$

$V_B - V_A = -\int_A^B (4x^2yz \; ; \; 2xy^2z \; ; \; -y^3) \cdot (dx \; ; dy \; ; dz)$

$V_B - V_A = -\int_A^B (4x^2yz\ dx + 2xy^2z\ dy - y^3\ dz)$ Application du produit scalaire.

$V_B - V_A = -4yz\int_A^B x^2\,dx - 2xz\int_A^B y^2\,dy + y^3\int_A^B dz$ Distribution de l'intégrale sur chacun des termes.

$V_B - V_A = -4yzx^3/3\ \Big|_A^B - 2xzy^3/3\ \Big|_A^B + y^3z\ \Big|_A^B$ Application des règles d'intégration et substitution des valeurs de x, y et z pour chacun des points considérés (ligne suivante).

$V_B - V_A = -\Big[4(4)(6)(2)^3/3 - 4(2)(3)(1)^3/3\Big] - \Big[2(2)(6)(4)^3/3 - 2(1)(3)(2)^3/3\Big] + \Big[(4)^3(6) - (2)^3(3)\Big]$

$V_B - V_A = -\Big[256 - 8\Big] - \Big[512 - 16\Big] + \Big[384 - 24\Big]$

$V_B - V_A = -384$ V

F) Potentiel électrique d'un conducteur à l'équilibre électrostatique

Étant donné que le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique (voir module 4.1) ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$), il n'y a pas de variation de potentiel à l'intérieur de celui-ci ($V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$). Le potentiel à l'intérieur du conducteur est donc constant et égal à la valeur du potentiel à la surface du conducteur.

5.2 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Dans cette section, nous allons utiliser les mêmes notions d'énergie vue en mécanique, mais cette fois-ci en considérant les forces électriques. Les problèmes se feront donc de la même manière qu'auparavant, mais en tenant compte d'une force supplémentaire (la force électrique).

Équations applicables en mécanique et en électricité

Théorème de l'énergie cinétique	$W_{net} = \Delta K$
Conservation de l'énergie	$W_{ext} = \Delta U + \Delta K$
Travail fait par une force	$W_F = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
Travail-énergie de forces conservatives	$W_c = - \Delta U$
Énergie potentielle gravitationnelle	$U_g = mgy$
Énergie potentielle électrique	$U_E = qV_E$
Énergie cinétique	$K = m v^2 / 2$
Quantité de mouvement	$\mathbf{P} = m\mathbf{v}$

Notez qu'on peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique aussi bien que l'équation de la conservation de l'énergie, puisque les deux équations sont équivalentes.

$W_{net} = \Delta K$

$W_{ext} + W_{Fé} + W_g = \Delta K$ Le travail extérieur est l'équivalent du travail fait par les forces non conservatives. Le travail fait par une force conservative est égal au signe contraire de la variation d'énergie potentielle. Le travail fait par gravité peut être négligé, puisque la force gravitationnelle est très petite comparativement à la force électrique pour des particules élémentaires (protons, électrons).

$W_{ext} - \Delta U + 0 = \Delta K$

$W_{ext} = \Delta U + \Delta K$ **Conservation de l'énergie (5.6)**

À l'équation précédente, si une particule se déplace à vitesse constante ($\Delta K= 0$), $W_{ext} = \Delta U = q\Delta V = q (V_B - V_A)$. Si la particule n'est soumise à aucune force extérieure ($0 = \Delta U + \Delta K$), alors $\Delta K = - \Delta U = - q (V_B - V_A)$. Ces deux situations constituent des cas particuliers qui peuvent être solutionnés à partir de l'équation générale (équation 5.6). C'est donc cette équation qui devra être utilisée et non celles particulières présentées ici et dans votre Benson.

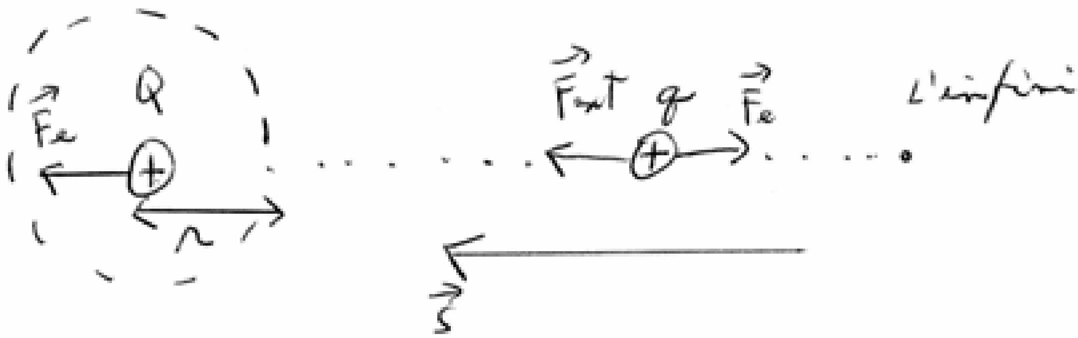
Notez également que l'équation 5.5 provient simplement de la définition même du travail vu en mécanique.

$W_F = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$	Le travail est une force fois le déplacement.
$- \Delta U_E = q \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$	Le travail fait par une force conservative est égal au signe contraire de la variation d'énergie potentielle. La force électrique est une force conservative et est égale à q**E**.
$- q\, \Delta V_E = q \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$	
$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$	

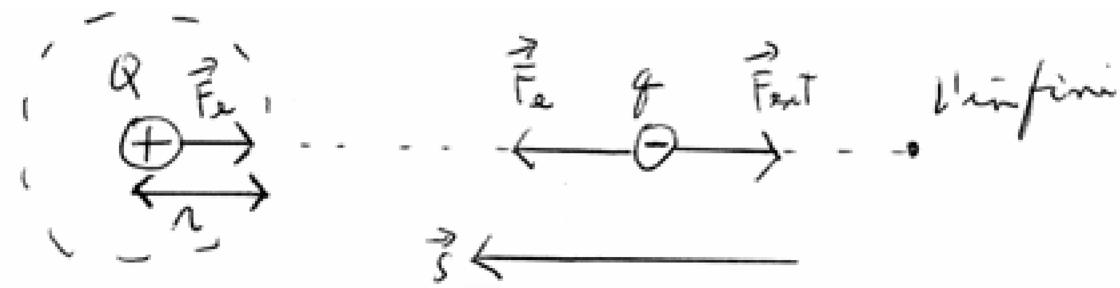
Un système de charges ponctuelles (voir module 5.1 D)) peut aussi être analysé selon son énergie potentielle électrique. <u>L'énergie potentielle électrique d'un système de particules chargées correspond au travail extérieur qu'il faut fournir pour amener chacune des charges de l'infini ($U_{infini} = 0$ J) jusqu'à une distance r l'une de l'autre, et ce, sans variation d'énergie cinétique (à vitesse constante)</u>. On se rappelle ici que de l'énergie potentielle est de l'énergie associée à une position par rapport à un référentiel déterminé. Dans le cas de l'énergie potentielle électrique, on fixe généralement le référentiel à l'infini pour une énergie nulle.

$W_{ext} = \Delta U + \Delta K$	
$W_{ext} = \Delta U + 0$	Si la vitesse constante, alors $\Delta K = 0$ J.
$W_{ext} = U_B - U_A$	U_A est fixée à 0 J à l'infini.
$W_{ext} = U_B$	D'où la définition énoncée plus haut.

Considérons une charge ponctuelle positive créant un potentiel électrique V = kQ/r à une distance r d'elle-même. Pour approcher une autre charge positive de l'infini à vitesse constante jusqu'à la distance r de la première charge positive, il faut fournir un travail positif (force extérieure dans le même sens que le déplacement) de manière à vaincre la répulsion existante entre les deux charges.



Par contre, pour approcher une charge négative dans les mêmes conditions, il faut fournir un travail négatif, puisque cette fois-ci, la force extérieure est dans le sens contraire au déplacement (il faut vaincre l'attraction entre la charge + et – et ainsi permettre à la particule négative d'effectuer le trajet à vitesse constante).



Puisque U = qV (énergie potentielle d'une charge q à un potentiel V créé par une autre charge (Q)) et que V = kQ/r, l'énergie potentielle de deux particules chargées à une distance r l'une de l'autre est U = kqQ/r. Pour un système de particules, nous obtenons l'équation suivante :

$$U_E = \sum U_{ij} = \sum k\, q_i\, q_j \,/\, r_{ij}$$

Énergie potentielle d'un système de plusieurs charges (5.7)

où : U_E = énergie potentiel électrique (scalaire) (J) (joule)

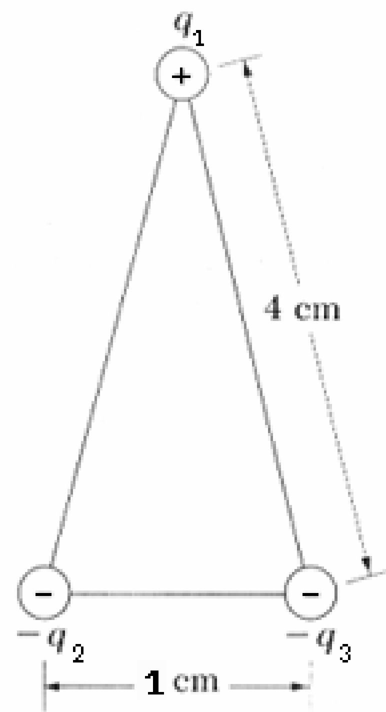
k = constante de la loi de Coulomb = 9,00 x 10^9 N·m^2 / C^2

q_i = charge électrique de la particule i (C) (i < j pour éviter de compter deux fois la même paire de charges puisque $U_{ij} = U_{ji}$)

q_j = charge électrique de la particule j (C) (coulomb)

r_{ij} = distance entre la particule i et la particule j (m) (mètre)

Exemple 5.3 : Trois charges ponctuelles occupent les sommets d'un triangle isocèle (q = 5 μC) tel qu'illustré. Déterminez l'énergie potentielle électrique de ce système.



$$U = \sum_{i<j} \frac{k q_i Q_j}{r_{ij}}$$

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$U = k\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]$$

$$U = (9{,}0 \times 10^9)(5 \times 10^{-6})^2\left[\frac{-1}{0{,}04} - \frac{1}{0{,}04} + \frac{1}{0{,}01}\right]$$

$$\boxed{U = 11{,}25\ \text{J}}$$

Exemple 5.4 : Déterminez le travail extérieur nécessaire pour déplacer un électron d'un point P_A (1 ; 1 ; 1) nm au point P_B (2 ; 2 ; 2) nm dans l'espace entourant une charge ponctuelle positive (proton), placée à l'origine du système d'axes, en le faisant accélérer de l'état de repos jusqu'à 4 x 10^6 m/s.

$W_{ext} = \Delta U + \Delta K$ Conservation de l'énergie

$\Delta U = q_é \Delta V = q_é(V_B - V_A) = - q_é \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ $q_é$ = charge de l'électron = - 1,602 x 10^{-19} C

$\Delta U = - q_é \int_A^B (kq_p/r^2 ; 0 ; 0) \cdot (dr ; R\, d\theta; R \sin\theta\, d\varphi)$ **E** et d**s** exprimés en coordonnées sphériques

q_p = charge du proton = 1,602 x 10^{-19} C

$\Delta U = - kq_é q_p \int_A^B r^{-2}\, dr$ Application du produit scalaire

$\Delta U = - kq_é q_p (- r^{-1}) \Big|_A^B$ Application de l'intégrale

$\Delta U = kq_é q_p (r_B^{-1} - r_A^{-1})$

$\Delta U = (9{,}0 \times 10^9)(- 1{,}602 \times 10^{-19})(1{,}602 \times 10^{-19}) ((3{,}464 \times 10^{-9})^{-1} - (1{,}732 \times 10^{-9})^{-1})$

$\mathbf{\Delta U = 6{,}67 \times 10^{-20}\ J}$

$r_A = (x_A^2 + y_A^2 + z_A^2)^{1/2} = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{1/2} = 1{,}732$ nm

$r_B = (x_B^2 + y_B^2 + z_B^2)^{1/2} = (2^2 + 2^2 + 2^2)^{1/2} = 3{,}464$ nm

$\Delta K = m (v_f^2 - v_i^2) / 2$

$\Delta K = (9{,}11 \times 10^{-31}) ((4 \times 10^6)^2 - (0)^2) / 2$

$\mathbf{\Delta K = 7{,}29 \times 10^{-18}\ J}$

$W_{ext} = \Delta U + \Delta K$ Conservation de l'énergie

$W_{ext} = 6{,}67 \times 10^{-20} + 7{,}29 \times 10^{-18}$

$W_{ext} = 7{,}35 \times 10^{-18}$ J

Note : Le champ électrique d'une charge ponctuelle étant connu, nous avons pu procéder au calcul de la différence de potentiel avec l'équation 5.5. Ceci a été réalisé pour montrer comment appliquer cette équation, ainsi que l'avantage d'utiliser les coordonnées sphériques lorsque la situation si prête. Nous aurions évidemment pu utiliser directement le potentiel d'une charge ponctuelle puisqu'il est connu ($V_B - V_A = kq_p (r_B^{-1} - r_A^{-1})$).

5.3 DÉTERMINATION DU CHAMP ÉLECTRIQUE À PARTIR DU POTENTIEL

Le principe de cette méthode est relativement simple et est basé sur le fait qu'un potentiel électrique est facilement mesurable. Expérimentalement parlant, une série de mesures du potentiel électrique est prise de façon à couvrir l'ensemble de l'espace que l'on souhaite étudier. À partir de ces mesures, on détermine l'équation du potentiel en fonction de la position (courbe de tendance). Une fois l'équation obtenue, on dérive partiellement cette équation et on obtient l'équation du champ électrique en fonction de la position. En théorie, la même procédure peut être appliquée pour obtenir le champ électrique, si nous disposons de la relation théorique du potentiel en fonction de la position.

Appliquer une dérivée partielle sur une équation est relativement simple lorsque l'on sait déjà dériver. Il s'agit en fait de dériver par rapport à une variable comme à l'habitude, mais en considérant toutes les autres variables de l'équation constantes. Le symbole de la dérivée partielle est ∂ au lieu de d. À ce stade-ci, il serait bon de revoir les règles de dérivation pour les principales fonctions (x^n , $1/x$, e^{ax} , $\ln|x|$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$) (voir annexe C du Benson).

D'après la relation (vue précédemment) $dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz)$ (application du produit scalaire), nous obtenons $E_x = -(dV/dx)$ pour y et z constantes (pas de variations dy et dz dans l'équation précédente si y et z sont constantes). La même procédure s'applique pour les autres composantes du champ et on obtient avec la notation de dérivée partielle, la relation suivante entre le champ électrique et le potentiel électrique.

$$\mathbf{E} = -\partial V/\partial x\ \mathbf{i} - \partial V/\partial y\ \mathbf{j} - \partial V/\partial z\ \mathbf{k}$$ **Champ électrique à partir du potentiel (5.8)**

où : $\mathbf{E}$ = champ électrique (vectoriel) (N/C)

$-\partial V/\partial x = E_x$ = composante en x du champ électrique (N/C)

$-\partial V/\partial y = E_y$ = composante en y du champ électrique (N/C)

$-\partial V/\partial z = E_z$ = composante en z du champ électrique (N/C)

Exemple 5.5 : Déterminez le champ électrique associé à la fonction potentiel $V(x, y, z) = 4\,x^2z^3 - 3x^3yz + 2xy$ au point P (1 ; 2 ; 3).

$$E_x = -\,\partial V/\partial x = -\left[\,8xz^3 - 9x^2yz + 2y\,\right] = -\left[\,8(1)(3)^3 - 9(1)^2(2)(3) + 2(2)\,\right] = -\,166\ \text{N/C}$$

$$E_y = -\,\partial V/\partial y = -\left[\,0 - 3x^3z + 2x\,\right] = -\left[\,0 - 3(1)^3(3) + 2(1)\,\right] = +\,7\ \text{N/C}$$

$$E_z = -\,\partial V/\partial z = -\left[\,12x^2z^2 - 3x^3y + 0\,\right] = -\left[\,12(1)^2(3)^2 - 3(1)^3(2) + 0\,\right] = -\,102\ \text{N/C}$$

$$\mathbf{E} = (\,-166\ ;\ 7\ ;\ -102\,)\ \text{N/C} = (\,-166\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j} - 102\,\mathbf{k})\ \text{N/C}$$

Note : Pour résoudre ce problème, il s'agit de dériver partiellement la fonction potentiel pour obtenir les composantes du champ en fonction de la position. Ensuite, on remplace simplement les variables x, y et z par leur valeur au point de l'espace demandé.

La dérivée partielle $\partial V/\partial y$ comporte un terme nul, puisque la dérivée d'une constante est nulle. Le premier terme de la fonction potentiel dépend uniquement de x et z (qui sont considérés constantes lorsque l'on dérive par rapport à y). La même remarque s'applique pour le cas de E_z.